Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 7
22.–26.3.2010

1. Osoita, että kompleksilukujen osajoukko

$$\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$$

   on rengas. Onko se kokonaisalue? Jos on, niin mikä on sen karakteristika? Onko $\mathbb{Z}[i]$ kunta?

2. Osoita, että joukko $A = \{[0]_6, [2]_6, [4]_6\}$ on rengas. Onko se renkaan $\mathbb{Z}_6$ alirengas? Osoita, että A on kunta. Mikä on sen karakteristika?

3. Olkoon R rengas. Määritellään $S = \{a \in R \mid ar = ra \text{ kaikilla } r \in R\}$. Osoita, että S on renkaan R alirengas.

4. Ratkaise kokonaisalueessa yhtälöt $x^3 - x = 0$ ja $x^2 + x - 2 = 0$. Montako ratkaisua yhtälöillä on, jos kokonaisalueen karakteristika on 2? Entä silloin, jos karakteristika on 3?

5. Määritellään joukossa $\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7$ laskutoimitukset $+$ ja $\cdot$ seuraavasti:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \quad \text{ja} \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd).$$

   Tiedämme, että $(\mathbb{Z}_7 \times \mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ on rengas. Osoita, että se ei ole kokonaisalue eikä siten myöskään kunta.

6. Olkoon G ryhmä ja H sen aliryhmä.
   a) Oletetaan, että $x, y \in G$. Osoita, että $x(Hy) = (xH)y$.
   b) Oletetaan, että $x \in G$ ja $h \in H$. Osoita, että $xhH = xH$.
   c) Osoita, että $HH = H$.

7*. Seuraava tehtävä on hieman haastavampi harjoitus sellaista kaipaaville. Tätä tehtävää ei käsitellä laskuharjoituksissa, eikä sen ratkaisemisesta saa lisäpisteitä.

   Oletetaan, että R on rengas. Alkio $a \in R \setminus \{0\}$ on *nollanjakaja*, jos on olemassa $b \in R \setminus \{0\}$, jolle pätee $ab = 0$. Alkio $a \in R$ on *nilpotentti*, jos on olemassa sellainen positiivinen kokonaisluku, että $a^n = 0$.

   a) Osoita, että vaihdannaisessa renkaassa nollanjakajilla ei ole käänteisalkioita kertolaskun suhteen.
   b) Osoita, että jos alkio a on nilpotentti, niin alkiolla $a + 1$ on käänteisalkio kertolaskun suhteen.