Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 6
15.–19.3.2010

1. Osoita, että $\mathbb{Z}_7 \setminus \{[0]_7\}$ on ryhmä, kun laskutoimituksena on kertolasku. Osoita, että ryhmä on syklinen ja määritä sen aliryhmät. Mitkä ovat aliryhmien sivuluokat? Piirrä kuvat aliryhmistä ja sivuluokista.

2. Osoita, että $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ on ryhmä. Osoita, että $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ on rengas.

3. Etsi yhtälön $z^8 = 1$ ratkaisut. Mikä on ratkaisujoukon muodostaman ryhmän virittäjä? Piirrä ratkaisuista kuva. Määritä ryhmän aliryhmät.

4. Tarkastellaan ryhmän S_3 aliryhmää $A = \{(1), (12)\}$ ja sen vasempien sivuluokkien muodostamaa joukkoa S_3/A. Määritellään joukossa S_3/A operaatio $*$ seuraavasti:
$$\sigma A * \tau A = (\sigma\tau)A.$$
Osoita, että sivuluokan edustajan valinta vaikuttaa operaatioon. Toisin sanoen, tulos $\sigma A * \tau A$ voi saada eri arvoja sen mukaan, millaiset edustajat σ ja τ sivuluokille on valittu.

5. Määritellään $R = \{[0]_{10}, [2]_{10}, [4]_{10}, [6]_{10}, [8]_{10}\}$. Osoita, että $(R, +, \cdot)$ on rengas.

6. Oletetaan, että R rengas ja $a, b \in R$. Osoita, että

   a) $(-1) \cdot a = -a$, missä -1 ja $-a$ ovat alkioiden 1 ja a vasta-alkiot

   b) $-(a + b) = -a + (-b)$.

7*. Seuraava tehtävä on hieman haastavampi harjoitus sellaista kaipaaville. Tehtävää ei käsitellä laskuharjoituksissa, eikä sen ratkaisemisesta saa lisäpisteitä.

Oletetaan, että R on rengas, jossa pätee $r^2 = r$ kaikilla $r \in R$.

   a) Osoita, että $r = -r$ kaikilla $r \in R$. (Vihje: Tutki alkiota $(r + r)^2$.)

   b) Osoita, että R on vaihdannainen eli että $rs = sr$ kaikilla $r, s \in R$.