Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 5
22.–26.2.2010

1. a) Osoita, että $2900 \equiv 2 \pmod 9$.
   b) Etsi jokin ratkaisu yhtälölle $2^{2010}x \equiv 12^{2010} \pmod 5$.
   c) Mikä on jakojäännös, kun $3^{2010} - 7^{2010}$ jaetaan luvulla 8?

2. Osoita, että $\{[0]_9, [3]_9, [6]_9\}$ on ryhmän $(\mathbb{Z}_9, +)$ aliryhmä. Etsi sen sivuluokat.

3. Osoita, että joukko $\{[2]_{10}, [4]_{10}, [6]_{10}, [8]_{10}\}$ on ryhmä, kun laskutoimituksena on jäännösluokkien kertolasku.

4. Oletetaan, että $\mathrm{syt}(n, m) = 1$. Määritä ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ aliryhmä $\langle n, m\rangle$.

5. Määritä ryhmän $\mathbb{Z}_{12}$ aliryhmät. Mitkä ovat aliryhmien kertaluvut? Entä indeksit?

6. a) Laske $\mathrm{syt}(351, 572)$.
   b) Etsi luvut $x, y \in \mathbb{Z}$, joille pätee $351x + 572y = \mathrm{syt}(351, 572)$.
   c) Olkoon $G$ ryhmä ja $g$ sen alkio. Oletetaan, että $g$:n kertaluku on 572. Määritä alkion $g^{351}$ kertaluku. Virittääkö se ryhmän $\langle g\rangle$? Määritä alkion $g^{175}$ kertaluku. Virittääkö se ryhmän $\langle g\rangle$?

7*. Seuraava tehtävä on hieman haastavampi harjoitus sellaista kaipaaville. Tehtävää ei käsitellä laskuharjoituksissa, eikä sen ratkaisemisesta saa lisäpisteitä.

   a) Jos $p$ on alkuluku, niin $(a + b)^p = a^p + b^p \pmod p$. (Niin kutsuttu fuksin unelma.)
   b) Osoita, että $n^5 - n \equiv 0 \pmod 3$ kaikilla $n \in \mathbb{Z}$.