Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 4
15.–19.2.2010

1. Määritellään reaalilukuparien relaatio $\sim$ seuraavasti:

$$(x, y) \sim (x', y') \iff x = kx' \text{ ja } y = ky' \text{ jollakin } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Toisin sanoen kyseessä on reaalitason vektoreiden relaatio

$$\bar{v} \sim \bar{w} \iff \bar{v} = k\bar{w} \text{ jollakin } k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Onko $\sim$ ekvivalenssirelaatio? Jos on, niin mitkä ovat sen ekvivalenssiluokat?

2. Määritä aliryhmän $\{(1), (23)\}$ vasemmat sivuluokat ryhmässä S_3. Ovatko ne samat kuin oikeat sivuluokat?

3. Määritä aliryhmän $5\mathbb{Z}$ vasemmat sivuluokat ryhmässä $(\mathbb{Z}, +)$. Ovatko sivuluokat $1873 + 5\mathbb{Z}$ ja $898 + 5\mathbb{Z}$ samat?

4. Oletetaan, että G on ryhmä ja H sen aliryhmä. Olkoon $a \in G$. Osoita, että

$$aH = H \iff a \in H.$$

5. Olkoon $G = S_3/A$, missä $A = \{(1), (123), (132)\}$. Kyseessä on siis aliryhmän A kaikkien sivuluokkien joukko. Määritellään G:lle laskutoimitus $*$ seuraavasti. Jos $gA, hA \in G$, niin $gA * hA = (gh)A$. Osoita, että $(G, *)$ on ryhmä.

Huomaa, ettei ole selvää, että $*$ on G:n laskutoimitus. Käsittelemme asiaa myöhemmin ja toistaiseksi voit olettaa, että laskutoimitus on hyvin määritelty.

6. a) Oletetaan, että G on ryhmä ja sen alkion g kertaluku on 4. Mitkä ovat alkioiden g^2 ja g^3 kertaluvut?

   b) Olkoon G ryhmä. Oletetaan, että $g, x \in G$ ja g:n kertaluku on n. Mikä on alkion g^{-1} kertaluku? Entä alkion xgx^{-1}?

7*. Seuraava tehtävä on hieman haastavampi harjoitus sellaista kaipaaville. Tehtävää ei käsitellä laskuharjoituksissa, eikä sen ratkaisemisesta saa lisäpisteitä.

   a) Olkoon G ryhmä. Oletetaan, että G:ssä kaikkien neutraalialkiosta poikkeavien alkioiden kertaluku on 2. Osoita, että G on vaihdannainen.

   b) Olkoon G ryhmä. Oletetaan, että G:ssä vain yhden alkion g kertaluku on kaksi. Osoita, että $xg = gx$ kaikilla $x \in G$.