

Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 2
1.-5.2.2010

1. Määritellään kokonaisluvuille laskutoimitus $x * y = x + y + 1$. Osoita, että $(\mathbb{Z}, *)$ on ryhmä. Olkoon O parittomien kokonaislukujen joukko. Osoita, että $(O, *)$ on ryhmän $(\mathbb{Z}, *)$ aliryhmä.
2. Olkoon G ryhmä. Osoita, että karteellinen tulo $G \times G$ on ryhmä, kun laskutoimitus määritellään seuraavasti: $(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd)$.
3. Olkoon $G = \{E, O\}$, missä E on parillisten kokonaislukujen joukko, ja O on parittomien kokonaislukujen joukko. Joukolle G voidaan määrittellä laskutoimitus $*$ seuraavasti. Oletetaan, että $X, Y \in G$. Valitaan jotkin alkio $x \in X$ ja $y \in Y$. Nyt $X * Y$ on se joukko, johon summa $x + y$ kuuluu. (Tässä kyse on tavallisesta kokonaislukujen yhteenlaskusta.) Osoita, että G on ryhmä.

Huomio: Ei ole itsestään selvää, että $*$ on joukon G laskutoimitus. Sitä ei tehtävässä tarvitse erikseen osoittaa, vaan käsittelemme asiaa myöhemmin.

4. Määritellään

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = 2010n$$

ja

$$g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, g(n) = |n|.$$

Ovatko f ja g injektioita, surjektioita tai bijektioita?

Olkoot $A = \{0, 1, 2, \dots, 5000\}$ ja $B = \{-10, -9, \dots, 9, 10\}$. Määritä $f^{-1}[A]$, $g[B]$ ja $g^{-1}[A]$.

5. Olkoon $f : A \rightarrow B$ kuvaus ja $C, D \subset B$. Osoita, että

$$f^{-1}[C \cup D] = f^{-1}[C] \cup f^{-1}[D].$$

6. Määritellään

$$f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \setminus \{0\}, f(n) = (-1)^n.$$

Määritä $\text{Im}(f)$ ja $f^{-1}[\{1\}]$. Onko $\text{Im}(f)$ ryhmän $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ aliryhmä? Onko $f^{-1}[\{1\}]$ ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ aliryhmä?