Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 11
26.4.–30.4.2010

1. a) Etsi ryhmälle $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ jokin virittäjä. Laskutoimituksena on tietenkin $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$.
   b) Osoita homomorfialauseen avulla, että $\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$. (Tässä ei ole tarkoitus käyttää syklisten ryhmien isomorfisuutta koskevaa lausetta.)

2. Mitkä seuraavista kuvauksista ovat rengashomomorfismeja?

   a) $f : (\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot) \to (\mathbb{Z}_{12}, +, \cdot), \quad f(x) = 3x$
   b) $g : (\mathbb{C}, +, \cdot) \to (\mathbb{C}, +, \cdot), \quad f(a + bi) = a - bi.$
   c) $h : (\mathbb{R}, +, \cdot) \to (\mathbb{R}, +, \cdot), \quad h(x) = x^2$
   d) $k : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n, \quad k(a, b) = (a, [b]_n).$

   Määritä homomorfismien kuvat ja ytimet. Ovatko kuvaukset isomorfismeja?

3. Olkoon $f : R \to S$ rengashomomorfismi ja I renkaan S ideaali. Osoita, että $f^{\leftarrow}[I]$ on renkaan R ideaali.

4. Olkoon $f = X^2 + X + 1$. Etsi sen juuret kunnissa $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_3$, $\mathbb{Z}_7$ ja $\mathbb{Q}$. Tutki kussakin tapauksessa, onko f jaoton. Jos ei, niin ilmaise se kahden ensimmäisen asteen polynomin tulona.

5. Olkoon R vaihdannainen rengas. Osoita, että joukko
$$\left\{ \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \mid a_i \in R,\ a_0 = 0,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$
   on renkaan $R[X]$ ideaali.

6. Ovatko polynomien $2X^3 + X^2 + 1$ ja $X^4 + 2X^2 + 1$ määräämät polynomikuvaukset samat renkaassa $\mathbb{Z}_4$? Entä renkaassa $\mathbb{Q}$?

7*. Seuraava tehtävä on hieman haastavampi harjoitus sellaista kaipaaville. Tätä tehtävää ei käsitellä laskuharjoituksissa, eikä sen ratkaisemisesta saa lisäpisteitä.

   a) Merkitään $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ja $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$. Osoita, että ryhmät $\mathbb{R}^*/\{1, -1\}$ ja $\mathbb{R}_+$ ovat isomorfisia, kun laskutoimituksena on kertolasku.
   b) Olkoon $\langle X^2 + 1 \rangle$ polynomin $X^2 + 1$ virittämä ideaali. Osoita, että
$$\mathbb{R}[X]/\langle X^2 + 1 \rangle \cong \mathbb{C}.$$