Algebra I
Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Harjoitus 10
19.4.–23.4.2010

1. Määritä harjoituksen 9 tehtävän 6 homomorfismien kuvat ja ytimet. Ovatko homomorfismit isomorfismeja?

2. Määritellään joukon $\mathbb{Z}$ laskutoimitus $*$ kuten harjoituksen 2 tehtävässä 1. Tiedämme, että $(\mathbb{Z}, *)$ on ryhmä. Osoita, että se on isomorfinen ryhmän $(\mathbb{Z}, +)$ kanssa.

3. Osoita käyttäen ryhmien homomorfialausetta, että $6\mathbb{Z}/18\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_3$.

4. a) Osoita, että $\mathbb{Z} \times \{0\}$ on ryhmän $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ aliryhmä. Laskutoimituksena on

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

   b) Osoita homomorfialauseen avulla, että

$$(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})/(\mathbb{Z} \times \{0\}) \cong \mathbb{Z}.$$

   Vihje: Käytä kuvausta $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(a, b) = b$.

5. Olkoon $f : G \to H$ ryhmähomomorfismi. Osoita normaalisuuskriteerin avulla, että normaalin aliryhmän alkukuva on normaali. Toisin sanoen todista, että

$$\text{jos } N \trianglelefteq H, \text{ niin } f^{\leftarrow}[N] \trianglelefteq G.$$

6. a) Olkoon $f : G \to H$ ryhmähomomorfismi. Osoita, että jos G on vaihdannainen, niin $\mathrm{Im}(f)$ on vaihdannainen.

   b) Osoita, että ryhmät $\mathbb{Z}_6$ ja S_3 eivät ole isomorfiset.

7*. Seuraava tehtävä on hieman haastavampi harjoitus sellaista kaipaaville. Tätä tehtävää ei käsitellä laskuharjoituksissa, eikä sen ratkaisemisesta saa lisäpisteitä.

Oletetaan, että $\mathrm{syt}(n, m) = 1$. Osoita, että ryhmät $\mathbb{Z}_{nm}$ ja $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ ovat isomorfiset.